اسم المحاضرة
المحددات

اسم الدكتور/ة أستاذ ماهر حمدان

RBO HAMAK

التاريخ :

اسم المادة
رياضيات .

تمرينات عن محددات:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6-5 = 1$$

بطريقة الضرب ←

$$\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

خواص المحددات :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

يمكن التبديل ولكن نضرب بإشارة سالبة (-)

Scanned by CamScanner

مثال :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

نقسم على 3 في السطر R_2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \\ R_4 - 4R_1 \to R_4 \end{matrix}$$

طريقة تخفيض الرتبة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 - 7R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -36 \end{vmatrix}$$

$$-1 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -36 \end{vmatrix} = -(-144 - 16) = 160$$

Scanned by CamScanner

جداء عناصر القطر الرئيسي :

المحدد المثلثي (طريقة غاوس) :

كل محدد من المرتبة n والذي جميع عناصره تحت القطر الرئيسي أو فوقه أصفار يسمى محدد مثلثي وقيمة المحدد المثلثي تساوي جداء عناصر القطر الرئيسي .

تمرين

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \to r_3 \\ r_4 - 3r_1 \to r_4}]{R_2 - r_1 \to r_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 - R_2 \to R_3 \\ r_4 + r_2 \to r_4 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \end{vmatrix}$$

$$r_4 + r_3 \to r_4 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2(-12) = -48$$

تمرين: أوجد بطريقة غاوس:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - r_1 \to r_2 \\ r_3 - r_1 \to r_3 \\ r_4 - r_1 \to r_4 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot b \cdot c$$

Scanned by CamScanner

مثال :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3]{R_2 - 5R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -14 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -14 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 42 = 30$$

مثال طريقة ساروس

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 16 + 4 + 15 - (24 + 1 + 40) = 35 - 65 = -30$$

حل جملة المعادلات التالية بطريقة كرامر :

$$x \quad - z = 4$$
$$2x + y - z = 4$$
$$x + 2y + 5z = 8$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} r_2 - 2r_1 \rightarrow r_2 \\ r_3 - r_1 \rightarrow r_3 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 28 , \quad \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -28$$

Scanned by CamScanner

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{28}{4} = 7$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-28}{4} = -7$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$$

بما أن $\Delta \neq 0$ للمعادلات حل وحيد

عندما $\Delta \neq 0$ فجملة المعادلات حل وحيد.

$\Delta = 0$ ← $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ للمعادلات عدد غير منتهٍ من الحلول.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z \neq 0$ مستحيلة

مثال:

$$3x + 5y - 2z = 6$$
$$4x + y - 3z = 8$$
$$2x + 9y - z = -2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \\ 2 & 9 \end{matrix}$$

$$= -3 - 36 - 72 - (-4 - 81 - 20) = -105 - (-105) = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0$$ مستحيلة

Scanned by CamScanner

مثال: ناقش حسب قيم λ حلول المعادلة:

حسب كرامر:

$$\lambda x + y = 1$$
$$x + \lambda y = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

$$\lambda \in R \setminus \{-1, 1\} \Leftarrow \Delta \neq 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1$$

$$x = \frac{1}{\lambda + 1} \quad , \quad y = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$\Delta = 0 \rightarrow \lambda = 1$ للمعادلة عدد غير منته من الحلول.

$\lambda = -1 \rightarrow \Delta x \neq 0$ مستحيلة.

مثال: أوجد مقلوب مصفوفة باستخدام طريقة المصفوفة المساعدة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

نوجد مصفوفة الصغائر:

Scanned by CamScanner

$$
\begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 7 & -11 & 3 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{مصفوفة الصغائر}
$$

(منقول مصفوفة) $adj(A)$ أو (A^*) $= \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

تبديل الأسطر بالأعمدة.

$$
A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -11 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-11}{4} & \frac{6}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}
$$

Scanned by CamScanner